Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Aufnahmeprüfung Mathematik

Übungsaufgaben zu den Kurzfragen

Januar 2021

Lösung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Keine ausser Stift und Papier

getippt in LaTeXvon Patrick Bütler

Grundlagen Algebra

1. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich:

(a) $\frac{2a+4}{a^2+4a+4}$.

Lösung:

$$\frac{2a+4}{a^2+4a+4} = \frac{2}{a+2}$$

(b) $\frac{\left(a^2-16\right)^8}{(a-4)^8}$.

Lösung:

$$\frac{\left(a^2-16\right)^8}{(a-4)^8} = (a+4)^8$$

(c) $\frac{4a^2-36}{a^2-a-12}$.

Lösung:

$$\frac{4a^2-36}{a^2-a-12} = 4\frac{a-3}{a-4}$$

2. Berechnen und vereinfachen Sie das Resultat so weit wie möglich:

(a) $\frac{9x^2+6x+1}{6x+2}$.

Lösung:

$$\frac{9x^2+6x+1}{6x+2} = \frac{3x+1}{2}$$

(b) $\frac{2x}{x-3} - \frac{2x^2}{x^2-4x+3}$.

Lösung:

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{2x^2}{x^2-4x+3} = -\frac{2x}{(x-3)\,(x-1)}$$

(c) $\frac{x-1}{x-8} + \frac{x+2}{2x+6} - \frac{x+3}{x^2-5x-24}$.

Lösung:

$$\frac{x-1}{x-8} + \frac{x+2}{2x+6} - \frac{x+3}{x^2-5x-24} = \frac{3x^2-4x-28}{2x^2-10x-48}$$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:

(a) $x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{64}{9} = 0.$

Lösung:

$$\frac{1}{9}(8-3x)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{\frac{8}{3}\right\}$$

(b) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0.$

Lösung:

$$\frac{1}{6}(2x-1)(3x-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right\}$$

(c) $x^2 - 12x + 18 = 0.$

Lösung:

Mitternachtsformel $\qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{6 - 3\sqrt{2},\ 6 + 3\sqrt{2}\right\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:

(a) $12x^4 - 81x^2 = 21.$

Lösung:

$$3\left(x^2-7\right)\left(4x^2+1\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{-\sqrt{7},\ \sqrt{7}\right\}$$

(b) $3x - 5\sqrt{x} - 8 = 0.$

Lösung:

$$\left(\sqrt{x}+1\right)\left(3\sqrt{x}-8\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \left\{\frac{64}{9}\right\}$$

(c) $\left(\frac{x-5}{4}\right)^2 - 6 = \left(\frac{x-5}{4}\right).$

Lösung:

Substitution von $u = \dfrac{x-5}{4}$ liefert $u^2 - u - 6 = (u+2)(u-3) = 0$
$\Rightarrow u \in \{-2,\ 3\}$
Resubstitution liefert $\mathbb{L} = \{-3,\ 17\}$.

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:

(a) $x^3 - 3x^2 - 28x = 0.$

Lösung:

$$x\,(x-7)\,(x+4) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{-4,\ 0,\ 7\}$$

(b) $(x^3 - 5x^2 - 24x)\,(x^4 - 16) = 0.$

Lösung:

$$x\,(x-8)\,(x-2)\,(x+2)\,(x+3)\left(x^2+4\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 8\}$$

(c) $(x-3)^3 = x\,(x-3)^2\,(x+5).$

Lösung: $x - 3$ steht auf beiden Seiten, deshalb ist 3 eine Lösung. Dividiert man beide Seiten durch $(x-3)^2$, steht noch das Polynom $(x+3)(x+1) = 0$. Deshalb ist $\mathbb{L} = \{-3,\ -1,\ 3\}$.

Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Normalform $z = a + bi$ für:

(a) $z = \frac{2-i}{i}$.

Lösung: $z = -1 - 2i$.

(b) $z = (2 + 3i)(3 - 5i)$.

Lösung: $z = 21 - i$.

(c) $z = \frac{4-5i}{4+5i}$.

Lösung: $z = -\frac{9}{41} - \frac{40}{41}i$.

(d) $z = (2 - i)^4$.

Lösung: $z = -7 - 24i$.

2. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ für:

(a) $z = \frac{1}{1+i}$.

Lösung: $\mathrm{Im}(z) = -0.5$.

(b) $z = \frac{3+2i}{1+i}$.

Lösung: $\mathrm{Im}(z) = -0.5$.

3. Es sei $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Polarform $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ für:

(a) $z = \sqrt{3} + i$.

Lösung: $z = 2(\cos(30°) + i\sin(30°))$.

(b) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösung: $z = \cos(120°) + i\sin(120°)$.

(c) $z = (1 - i)^6$.

Lösung: $z = 8(\cos(90°) + i\sin(90°)) = 8i$.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. *Single Choice:* Berechnen Sie x und kreuzen Sie an.

$8^x = 16$, $x = ?$

- ☐ $\frac{2}{3}$.
- ☐ $\frac{3}{4}$.
- ☒ $\frac{4}{3}$.

  Lösungsweg:

  $$x = \frac{\log_2(16)}{\log_2(8)} = \frac{4}{3}$$
- ☐ $\frac{3}{2}$.
- ☐ anderes.

2. *Single Choice:* Berechnen Sie x und kreuzen Sie an.

$\frac{27^{0.2}}{9^{0.25}} = 3^x$, $x = ?$

- ☒ 0.1.

  Lösungsweg:

  $$x = \log_3\left(\frac{27^{0.2}}{9^{0.25}}\right) = 0.2\log_3(27) - 0.25\log_3(9) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$
- ☐ 0.05.
- ☐ -0.05.
- ☐ -1.
- ☐ anderes.

3. *Single Choice:* Berechnen Sie x und kreuzen Sie an.

$$\frac{b^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = b^x,\ x = ?$$

- ☐ 1.
- ☐ $\frac{1}{2}$.
- ☐ $-\frac{1}{2}$.
- ☐ -1.
- ☒ anderes.

Lösungsweg:

$$\frac{b^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = b^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{1}{6}}$$

4. *Single Choice:* Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = ?$$

- ☐ $\sqrt{2}$.
- ☐ $\sqrt[3]{2}$.
- ☐ $\sqrt[7]{2}$.
- ☒ $\sqrt[12]{2}$.

Lösungsweg:

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

- ☐ anderes.

5. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen.
Ein Resultat der Form $\frac{\log(a)}{\log(b)}$ ist in Ordnung.

(a) $2^{3x+1} = 6^{x-1}$.

Lösung: Mit der Identität $\log(a^b) = b\log(a)$ folgt $x = \frac{\log(12)}{\log(0.75)}$.

(b) $5^x \cdot 3^{2x} = 1000$.

Lösung: $x = \frac{\log(1000)}{\log(45)}$.

(c) $3^{x-2} = 4 \cdot 5^{1-3x}$.

Lösung: Mit den Identitäten $\log(a^b) = b\log(a)$ und $\log(\frac{ab}{c}) = \log(a)+\log(b)-\log(c)$ folgt $x = \frac{\log(180)}{\log(375)}$.

(d) $6 \cdot 2^{x-5} = 5 \cdot 6^{x+2}$.

Lösung: Mit den Identitäten $\log(a^b) = b\log(a)$ und $\log(\frac{ab}{c}) = \log(a) + \log(b) - \log(c)$ folgt $x = -\frac{\log(960)}{\log(3)}$.

(e) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$.

Lösung: Mit der Substitution $u = 2^x$ und folgt $x = 3$. Beachte, dass der Logarithmus nur für positive Argumente Lösungen hat.

6. Berechnen Sie:

(a) $\log_2\left(\frac{1}{2048}\right)$.

Lösung: -11.

(b) $\log_2\left(32^{2.5}\right)$.

Lösung: 12.5.

(c) $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}}\right)$.

Lösung: -1.5.

(d) $4^{3\log_4(6)}$.

Lösung: 216.

(e) $\log_{10}\left(\log_{10}\left(10^{\sqrt{1000}}\right)\right)$.

Lösung: 1.5.

7. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen:

(a) $\ln\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \ln\left(a^{\frac{3}{2}}\right) - \ln\left(\sqrt{a}\right)$.

Lösung: $\frac{5}{4}\ln(a)$.

(b) $2\log_a(8) - \log_a(4) + 4\log_a(3)$.

Lösung: $\log_a(1296)$.

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:

(a) $\ln\left(x^2\right) - \ln\left(x-3\right) = 8\ln(2) - \ln(16)$.

Lösung: Nach zusammenfassen der Logarithmen und Vergleich der Argumente von ln folgt aus der Gleichung $(x-12)(x-4) = 0$, dass $\mathbb{L} = \{4,\ 12\}$.

(b) $\ln(x)^3 - 5\ln(x)^2 - 24\ln(x) = 0$.

Lösung: Nach der Substitution $u = \ln(x)$ folgt $u \in \{-3,\ 0,\ 8\}$. Nach Rücksubstitution folgt $\mathbb{L} = \{e^{-3},\ 1,\ e^8\}$.

(c) $\lg(9x+5) - \lg(x) = 1$.

Lösung: Nach zusammenfassen des Logarithmus lg und Vergleich des Arguments mit $1 = \lg(10)$ folgt $\mathbb{L} = \{5\}$.

9. *Single Choice:* Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\ln\frac{1}{4} = ?$$

☒ $-2\ln(2)$.

Lösungsweg:

$$\ln\frac{1}{4} = \ln(1) - \ln(4) = \ln(2^0) - \ln(2^2) = -2\ln(2)$$

☐ $-\frac{1}{2}\ln(2)$.

☐ $\frac{1}{2}\ln(2)$.

☐ $2\ln(2)$.

☐ anderes.

10. *Single Choice:* Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\frac{1}{2}\ln(a) - 2\ln(b) = ?$$

- ☐ $\ln\left(\frac{\frac{1}{2}a}{2b}\right)$.
- ☐ $\ln\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$.
- ☐ $\ln\left(\frac{1}{2}a - 2b\right)$.
- ☒ $\ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b^2}\right)$.

  Lösungsweg:

  $$\frac{1}{2}\ln a - 2\ln(b) = \ln a^{\frac{1}{2}} - \ln(b^2) = \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b^2}\right)$$
- ☐ $\ln\left(\sqrt{a}b^2\right)$.

11. *Single Choice:* Berechnen Sie und kreuzen Sie an.

$$\ln\left(x^3 + x^3\right) = ?$$

- ☐ $2\ln\left(x^3\right)$.
- ☐ $\ln(6) + \ln(x)$.
- ☐ $6\ln(x)$.
- ☒ $\ln(2) + 3\ln(x)$.

  Lösungsweg:

  $$\ln\left(x^3 + x^3\right) = \ln\left(2x^3\right) = \ln(2) + \ln\left(x^3\right) = \ln(2) + 3\ln(x)$$
- ☐ anderes.

Analysis

1. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{2}{5x} + 2\sqrt[3]{x}$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{2}{5x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

(b) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 2}$.

Lösung:

$$f'(x) = \frac{5x - 2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 2}}.$$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x^3}{x^2 - 2}$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{4x\left(x^3 - 6x + 1\right)}{\left(x^2 - 2\right)^2}.$$

(d) $f(x) = -\cos(x)\sin(x)$.

Lösung:

$$f'(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x).$$

(e) $f(x) = 2\cos^2(x) + \frac{x}{\cos(x)}$.

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)} - 4\sin(x)\cos(x) + x\tan(x)\frac{1}{\cos(x)}.$$

(f) $f(x) = \frac{1}{a}\cos(\sqrt{ax})$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{ax})}{2\sqrt{ax}}.$$

(g) $f(x) = -2xe^{\frac{1}{x}}$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{2\sqrt[x]{e}(x-1)}{x}.$$

(h) $f(x) = \ln\left(x^2 + 4x + 7\right)$.

Lösung:

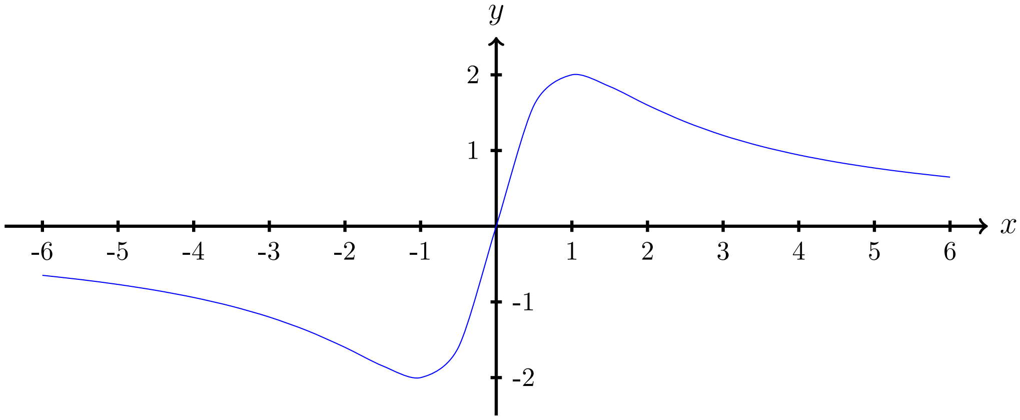
$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 7}.$$

(i) $f(x) = \frac{2}{x}\sqrt{x^2 + 1}$.

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. *Single Choice:* Der Graph



gehört zur Funktion, definiert durch:

- ☐ $y = \frac{2x}{x^2-1}$.
- ☒ $y = \frac{4x}{x^2+1}$.

  Lösungsweg: Da $x^2 + 1 \neq 0$ ist y für alle x definiert (nicht wie (a)). Im Nenner steht $4x$, darum ist $y < 0$ für $x < 0$ (nicht wie (c)) und $y = 0$ für $x = 0$ (nicht wie (d)).
- ☐ $y = \frac{10x^2}{x^2+1}$.
- ☐ $y = \frac{2x+2}{x^2+1}$.

3. Parabeln und Flächeninhalt.Die Punkte $P\,(4|?)$ und $Q\,(-2|?)$ liegen auf der Parabel $f(x) = y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Die Sekante durch P und Q schneidet ein Parabelsegment ab. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des entstehenden Parabelsegments.

Lösung: Die Gerade durch die Punkte P und Q ist gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 3.$$

Der Flčheninhalt bekommt man durch Integration der Differenz von der Parabel und der Geraden zwischen den Punkten P und Q:

$$A = \int_{-2}^{4} g(x) - f(x)\; dx = \int_{-2}^{4} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2\; dx = 9.$$

Grundlagen der Vektorgeometrie

1. Überprüfen Sie rechnerisch: Liegen die Punkte $A\,(3|8|9)$ und $B\,(1|-10|-8)$ auf der Geraden durch $C\,(5|2|3)$ und $D\,(4|5|6)$?

Lösung: Die Gerade durch die Punkte C und D ist gegeben durch

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{r}_C + t\,(\vec{r}_D - \vec{r}_C) = \begin{pmatrix} 5-t \\ 2+3t \\ 3+3t \end{pmatrix}.$$

Damit ein Punkt auf der Geraden liegt, muss t für alle Komponenten identisch sein. Somit liegt Punkt A auf der Geraden ($t = 2$), nicht aber Punkt B.

2. Für welchen Wert von u stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander?

(a) Für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}.$$

Lösung: Für Orthogonalität muss $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gelten. Somit finden wir u:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ u \end{pmatrix} = 10 - 21 + u = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = 11.$$

(b) Für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ u-7 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} u+2 \\ 9 \\ u+1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Für Orthogonalität muss $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gelten. Somit finden wir u:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ -1 \\ u-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u+2 \\ 9 \\ u+1 \end{pmatrix} = 2(u-4)(u+2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u \in \{-2,\ 4\}.$$

3. Gegeben sind die Punkte $A\,(-2|3|-2)$ und $B\,(-6|-1|1)$. Für welche Punkte P der x-Achse gilt $\angle APB = 90°$?

Lösung: Der Punkt auf der x-Achse ist gegeben durch $P\,(x|0|0)$. Für einen rechten Winkel muss das Skalarprodukt zwischen den Verbindungsvektoren verschwinden.

$$\vec{r}_{PA} \cdot \vec{r}_{PB} = \begin{pmatrix} -2-x \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6-x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+7)(x+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \{-1,\ -7\}.$$

4. Gegeben ist die Gerade g durch die Punkte $A\,(0|9|10)$ und $B\,(9|9|19)$. Wie gross ist der Abstand des Punktes $P\,(3|2|1)$ von der Geraden g?

Lösung: Die Gerade g ist gegeben durch

$$g: \quad \vec{r}_X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{r}_A + t\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \begin{pmatrix} 9t \\ 9 \\ 10+9t \end{pmatrix}.$$

Der Abstand von Punkt P zu einem beliebigen Punkt X auf der Geraden g ist gegeben durch $\vec{r}_{PX} = \begin{pmatrix} 9t-3 \\ 7 \\ 9+9t \end{pmatrix}$. Der Betrag davon ist $|\vec{r}_{PX}| = \sqrt{162t^2 + 108t + 139}$. Um die Distanz zur Geraden zu finden, muss diese Distanz minimiert werden.

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{r}_{PX}(t)|\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\vec{r}_{PX}\left(t = -\frac{1}{3}\right)\right| = 11.$$

5. Gegeben sind die Geraden g und h. Untersuchen und begründen Sie rechnerisch, ob sich die beiden Geraden schneiden. Falls ja, berechnen Sie den Schnittpunkt S.

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Damit sich die Geraden schneiden, muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + t_g \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} + t_h \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die dritte Komponente finden wir, dass $t_g = 0.25$. Durch ein lineares Gleichungssystem der ersten und zweiten Komponenten finden wir $t_h = 0.5$ und $t_g = 0.375$. Weil wir zwei verschieden Werte für t_g bekommen, schneiden sich die Geraden nicht.

6. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene

$$E : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

auf.

Lösung: Der Normalenvektor ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Die Paramter a, b und c in der Koordinatengleichung $E : ax + by + cz = d$ sind gegeben durch die Komponenten des Normalenvektors $\vec{n}$. Durch einsetzen des Stützpunktes finden wir d:

$$d = ax + by + cz = -24 \cdot 2 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -84.$$

Somit ist die Koordinatengleichung $E : -24x - 6y + 2z = -84$.

7. Bestimmen Sie den Durchstosspunkt folgender Ebene E und Geraden g:

$$E : 2x - y + 3z = 0, \qquad g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Setze die Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene ein. Man findet

$$2(3 + 2t) - (-4 - t) + 3(-1 + t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{7}{8}.$$

Den Durchstosspunkt findet man durch Einsetzen in die Geradengleichung

$$\vec{r}\left(t = -\frac{7}{8}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{7}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -3.125 \\ -1.875 \end{pmatrix}.$$

8. Gegeben sind die Punkte $A\,(-2|1|1)$ und $B\,(1|-3|-1)$. Berechnen Sie den Durchstosspunkt der Geraden $g = g(AB)$ und der Ebene $E : 2x - 3y + 6z - 21 = 0$.

Lösung: Setze die Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene ein. Man findet

$$2(-2 + 3t) - 3(1 - 4t) + 6(1 - 2t) = 21 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{11}{3}.$$

Den Durchstosspunkt findet man durch Einsetzen in die Geradengleichung

$$\vec{r}\left(t = \frac{11}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -41/3 \\ -19/3 \end{pmatrix}.$$

9. Gegeben ist der Punkt $P\,(2|-3|-1)$. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E auf, die durch den Punkt P geht und zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ normal steht.

Lösung: Die Paramter a, b und c in der Koordinatengleichung $E : ax + by + cz = d$ sind gegeben durch die Komponenten des Normalenvektors $\vec{n}$. Durch einsetzen des Punktes P finden wir d:

$$d = ax + by + cz = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) = 4.$$

Somit ist die Koordinatengleichung $E : x - 2y + 4z = 4$.

10. Gegeben ist der Punkt $P\,(-6|10|16)$ und die Gerade

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Koordinatengleichung der Normalebene N durch den Punkt P zur Geraden g auf.

Lösung: Der Normalenvektor der Ebene N ist gegen durch den Richtungsvektor der Geraden g. Die Paramter a, b und c in der Koordinatengleichung $N : ax + by + cz = d$ sind deshalb gegeben durch $a = -8$, $b = 4$ und $c = 8$. Durch einsetzen des Punktes P finden wir d:

$$d = ax + by + cz = -8 \cdot (-6) + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 16 = 216.$$

Somit ist die Koordinatengleichung $N : -8x + 4y + 8z = 216$ oder gekürzt mit 4 durch $N : -2x + y + 2z = 54$.

Stochastik

1. Eine Urne enthält rote und weisse Kugeln.Insgesamt befinden sich 40 Kugeln in der Urne. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne gezogen. Die Wahrscheinlichkeit dabei zwei weisse Kugeln zu ziehen, beträgt $P(E) = \frac{9}{20}$. Wie viele weisse Kugeln befinden sich in der Urne?

Lösung: Es seien zu Beginn w weisse Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit, zwei mal nacheinander eine weisse Kugel zu ziehen, ist gegeben durch

$$\frac{w}{40} \cdot \frac{w-1}{39} = \frac{9}{20} \quad \xLeftrightarrow{\text{Mitternachtsformel}} \quad w \in \{-26, 27\}.$$

Somit befinden sich zu Beginn 27 weisse Kugeln in der Urne.